Calcul matriciel – Matrices

Cours

1) NOTION DE MATRICE

Définition : On appelle **MATRICE** de **dimension** $n \times p$ un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés **COEFFICIENTS** de la matrice.

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow ligne\ 2 \\ \\ \leftarrow ligne\ n \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \quad & \uparrow & \quad & \uparrow \\ & colonne\ 2 & & colonne\ p \end{array} & \end{array}$$

Notations :

- Toute matrice A s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ où $a_{11}, \dots, a_{np}$ désignent les coefficients de la matrice.
- Le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté a_{ij}.
- La matrice A se note aussi $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$. Autrement dit, A est la matrice des coefficients a_{ij}.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, alors a_{12} désigne le coefficient de la $1^{\text{ère}}$ ligne et de la 2^{e} colonne avec $a_{12} = 4$ et a_{21} désigne le coefficient de la $2^{\text{ère}}$ ligne et de la $1^{\text{ère}}$ colonne avec $a_{21} = 2$. A se compose de 2 lignes et de 3 colonnes donc A est une matrice de dimension 2×3.

2) MATRICES PARTICULIÈRES

- Une matrice comportant une seule ligne s'appelle un **VECTEUR-LIGNE**. Un vecteur-ligne a donc pour dimension $1 \times p$. Dans ce cas, $n = 1$.

- Une matrice comportant une seule colonne s'appelle un **VECTEUR-COLONNE**. Un vecteur-colonne a donc pour dimension $n \times 1$. Dans ce cas, $p = 1$.

- Une matrice comportant autant de lignes que de colonnes s'appelle une **MATRICE CARRÉE**. Une matrice carrée a donc pour dimension $n \times n$. Dans ce cas, $n = p$.

- On appelle **MATRICE DIAGONALE** une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls, exceptés ceux de la diagonale issue du coin en haut à gauche. Autrement dit, A est une matrice diagonale si : $a_{ij} = k$ $(k \in \mathbb{R})$ si $i = j$ et $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

- On appelle **MATRICE IDENTITÉ** (ou **matrice unité**) une matrice carrée dont tous les coefficients de la diagonale issue du coin en haut à gauche sont égaux à 1, et dont tous les autres coefficients sont nuls. Autrement dit, A est une matrice identité si : $a_{ij} = 1$ si $i = j$ et $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. On note I_n la matrice identité d'ordre n.

- On appelle **MATRICE NULLE** toute matrice dont les coefficients sont tous nuls. Dans ce cas, $a_{ij} = 0$.

Exemples :

- $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ est un vecteur-colonne de dimension 2×1
- $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur-ligne de dimension 1×3
- $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de dimension 2×2 (ou d'ordre 2)
- $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 4, que l'on note I_4
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nulle.

Définition : Deux matrices sont égales si elles ont même dimension et si les coefficients situés à la même place sont égaux. Autrement dit, deux matrices A et B sont égales si A et B ont toutes deux pour dimension $n \times p$ et si $a_{ij} = b_{ij}$ (pour toute ligne i et toute colonne j).

Exemples :

- **Exemple 1 :** Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ ne sont pas égales puisqu'elles n'ont pas même dimension. En effet, la matrice A est de dimension 2×3 et la matrice B de dimension 3×2.
- **Exemple 2 :** Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sont deux matrices carrées de même dimension 2×2 ; elles ne sont égales que si le système suivant est vérifié : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \\ d = 4 \end{cases}$

1) TRANSPOSITION DE MATRICE

Définition : On appelle **MATRICE TRANSPOSÉE** de la matrice A la matrice obtenue en permutant les lignes et les colonnes de A. Ainsi, à tout coefficient a_{ij} de la matrice A correspond le coefficient a_{ji} de la matrice transposée A^T.

Corollaire : Si A est de dimension $n \times p$, alors A^T est de dimension $p \times n$.

Exemple : La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ a pour matrice transposée la matrice $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

2) SOMME DE MATRICES

Définition : On appelle **SOMME** de deux matrices (de même dimension $n \times p$) la matrice obtenue en additionnant les coefficients qui ont la même position.

Autrement dit, $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} + (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$.

Remarque importante : On ne peut pas additionner deux matrices de dimensions différentes.

Proposition : Les propriétés habituelles de l'addition valent pour la somme de matrices :

- **L'associativité :** $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
- **La commutativité :** $A + B = B + A$

Exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. $A + B = \begin{pmatrix} -1+1 & 4+2 \\ 2+3 & 5+4 \\ 3+5 & 6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 9 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$.

Remarque : Si la somme de matrices est commutative, en revanche nous verrons plus loin que la soustraction et le produit de matrices ne le sont pas.

3) SOUSTRACTION DE MATRICES

Remarque : La soustraction de matrices est un corollaire de l'addition de deux matrices.

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$ de dimension $n \times p$.

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & \cdots & a_{1p} - b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & \cdots & a_{np} - b_{np} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} - (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (a_{ij} - b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Remarque importante : On ne peut pas soustraire deux matrices de dimensions différentes.

4) PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN RÉEL

Définition : On appelle **PRODUIT** d'une matrice A par un réel k la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de A par k. Cette matrice est notée $k \times A$ ou kA.

Autrement dit, $k \times (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (ka_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Ainsi, $k \times \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \times a_{11} & \cdots & k \times a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \times a_{n1} & \cdots & k \times a_{np} \end{pmatrix}$.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ alors $-2A = \begin{pmatrix} -2 \times 1 & -2 \times 4 \\ -2 \times (-2) & -2 \times 5 \\ -2 \times 3 & -2 \times (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & -10 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$.

Remarques :

- On positionne toujours le réel avant la matrice et on écrit donc kA ou $k \times A$ et non $A \times k$.
- Les propriétés habituelles de la multiplication valent pour le produit d'une matrice par un réel.
- La matrice $(-1) \times A = -A$ est appelée la **MATRICE OPPOSÉE** de A. Cette relation permet de définir la **soustraction** de deux matrices : $A - B = A + (-B) = A + (-1) \times B$.

Proposition : Pour tous réels α et β et pour toutes matrices A et B, les propriétés de linéarité suivantes sont respectées :

- $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

5) PRODUIT D'UN VECTEUR-LIGNE PAR UN VECTEUR-COLONNE

Définition : Soit A un vecteur-ligne de dimension $1 \times p$ et B un vecteur-colonne de dimension $p \times 1$. On appelle **PRODUIT** des matrices $A \times B$ la somme des produits du premier élément de A par le premier élément de B, du deuxième élément de A par le deuxième élément de B, …, du $p^{\text{ème}}$ élément de A par le $p^{\text{ème}}$ élément de B.

Autrement dit, le produit $A \times B = (a_{1i})_{1\leq i\leq p} \times (b_{i1})_{1\leq i\leq p}$ correspond à la somme des produits $a_{1i} \times b_{i1}$, c'est-à-dire à la somme des produits du $i^{\text{ème}}$ élément de A par $i^{\text{ème}}$ le élément de B. (i variant de 1 à p)

Ainsi : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_pb_p$

Remarques importantes :

- La matrice A doit avoir autant de colonnes que B de lignes.
- Le produit $A \times B$ de deux matrices A et B est un nombre réel.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \times 4 + 3 \times (-5) + (-1) \times 6 = -13$

6) PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN VECTEUR-COLONNE

Définition : Soit A une matrice de dimension $n \times p$ et soit B un vecteur-colonne de dimension $p \times 1$. On appelle le produit $A \times B$ le vecteur-colonne de dimension $n \times 1$ obtenu en multipliant chaque ligne de A par le vecteur-colonne B.

Exemples :

- **Exemple 1 :** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times (-6) \\ -3 \times 5 + 4 \times (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -39 \end{pmatrix}$

- **Exemple 2 :** $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & -8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times 2 + 4 \times (-4) + 7 \times 6 \\ 2 \times 2 + (-5) \times (-4) + (-8) \times 6 \\ 3 \times 2 + 6 \times (-4) + 9 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 36 \end{pmatrix}$

- **Exemple 3 :** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times 7 + 2 \times (-8) + 3 \times 9 \\ 4 \times 7 + (-5) \times (-8) + (-6) \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}$

Remarque importante : Il faut que A ait autant de colonnes que B de lignes pour que le produit $A \times B$ soit possible.

7) PRODUIT DE DEUX MATRICES

Définition : Soit A une matrice de dimension $n \times p$ et soit B une matrice de dimension $p \times m$. On appelle le **PRODUIT $A \times B$** la matrice X de dimension $n \times m$ où chaque coefficient x_{ij} est le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Autrement dit : Si on pose $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq m}}$, $A \times B = (x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ avec $x_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Remarque importante : La matrice $A \times B$ n'est définie que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Exemples :

- **Exemple 1 :**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 9 + (-3) \times 3 & 1 \times 8 + 2 \times (-1) + (-3) \times 5 \\ 4 \times 7 + (-5) \times 9 + 6 \times 3 & 4 \times 8 + (-5) \times (-1) + 6 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -9 \\ 1 & 67 \end{pmatrix}$$

- **Exemple 2 :**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times (-6) + (-2) \times 3 & 1 \times 5 + (-2) \times 2 & 1 \times 4 + (-2) \times (-1) \\ 3 \times (-6) + 4 \times 3 & 3 \times 5 + 4 \times 2 & 3 \times 4 + 4 \times (-1) \\ (-5) \times (-6) + 6 \times 3 & (-5) \times 5 + 6 \times 2 & (-5) \times 4 + 6 \times (-1) \end{pmatrix}$$

Remarque : Disposition pratique des matrices pour les calculs souvent adoptée :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \times & = \begin{pmatrix} \boxed{1 \times 7 + 2 \times 9 + (-3) \times 3} & 1 \times 8 + 2 \times (-1) + (-3) \times 5 \\ 4 \times 7 + (-5) \times 9 + 6 \times 3 & 4 \times 8 + (-5) \times (-1) + 6 \times 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Propriétés :

- La multiplication de matrices n'est **pas commutative** : $A \times B \neq B \times A$.
- La multiplication de matrices est **associative** : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$.
- La multiplication des matrices est **distributive** par rapport à l'addition :
  $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

1) MATRICE INVERSE

Rappel : L'inverse d'un nombre réel non nul α est le nombre $\frac{1}{\alpha}$; il est défini par la relation $\alpha \times \frac{1}{\alpha} = 1$ où 1 est l'élément neutre de la multiplication.

Définition : Soit A une matrice carrée d'ordre n. La **MATRICE INVERSE** de A, notée A^{-1}, est définie, quand elle existe, par $A \times A^{-1} = I_n$. Si une telle matrice existe, on dit alors que A est **INVERSIBLE**.

Remarque : Certaines matrices n'admettent pas de matrice inverse. Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Propriété : On démontre que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$.

2) MATRICE INVERSE ET DÉTERMINANT

Définition : Soit A la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On appelle **DÉTERMINANT** de la matrice, noté $\det(A)$, le réel $ad - bc$.

Théorème : Soit une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $\det(A) \neq 0$, alors A admet une matrice inverse unique A^{-1} définie par $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

3) RECHERCHE DE L'INVERSE D'UNE MATRICE

Point-méthode : Pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée A d'ordre n, on recherche une matrice B dont les coefficients sont des inconnues, telle que $A \times B = I_n$, ce qui revient à résoudre un **SYSTÈME DE n ÉQUATIONS À n INCONNUES**. Si ce système n'admet pas de solution, A n'est pas inversible.

Exemples :

- **Exemple 1 :** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. Déterminons la matrice inverse de A, si elle existe.

$\det(A) = 1 \times (-4) - 2 \times (-2) = -4 + 4 = 0$

$\det(A) = 0$ donc la matrice A n'est pas inversible.

Remarque : Une matrice non inversible est également appelée **MATRICE SINGULIÈRE**.

- **Exemple 2 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminons la matrice inverse de A, si elle existe ; cherchons la matrice $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $A \times B = I_3$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5a + 6d + 8g & 5b + 6e + 8h & 5c + 6f + 8i \\ 4a + 1d + 7g & 4b + 1e + 7h & 4c + 1f + 7i \\ 2a + 0d + 3g & 2b + 0e + 3h & 2c + 0f + 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, résoudre $A \times B = I_3$ revient à résoudre les 3 systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} 5a + 6d + 8g = 1 \\ 4a + 1d + 7g = 0 \\ 2a + 0d + 3g = 0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 5b + 6e + 8h = 0 \\ 4b + 1e + 7h = 1 \\ 2b + 0e + 3h = 0 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} 5c + 6f + 8i = 0 \\ 4c + 1f + 7i = 0 \\ 2c + 0f + 3i = 1 \end{cases}$$

En résolvant ces systèmes, on obtient : $(S_1)\begin{cases} a = 3/11 \\ d = 2/11 \\ g = -2/11 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} b = -18/11 \\ e = -1/11 \\ h = 12/11 \end{cases} \quad (S_3)\begin{cases} c = 34/11 \\ f = -3/11 \\ i = -19/11 \end{cases}$

De ce fait, on conclut que $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{-18}{11} & \frac{34}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{12}{11} & \frac{-19}{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & -18 & 34 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & 12 & -19 \end{pmatrix}$.

4) ECRITURE MATRICIELLE D'UN SYSTEME LINEAIRE D'EQUATIONS ET RESOLUTION

Propriété : Tout système de n équations à n inconnues peut s'écrire sous la forme d'une égalité entre matrices.

Exemple : Soit le système $(S)\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ -x + 3y - 2z = 6 \end{cases}$. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Alors le système (S) peut s'écrire $A \times B = C$.

Point-méthode : Résoudre un système de n équations à n inconnues revient à rechercher l'inverse d'une matrice carrée d'ordre n. Si la matrice n'est pas inversible, le système n'a pas de solution.

Démonstration : Si A est inversible : $A \times B = C \Leftrightarrow A^{-1} \times A \times B = A^{-1} \times C \Leftrightarrow I_n \times B = A^{-1} \times C$

$\Leftrightarrow B = A^{-1} \times C$.

Exemple : Résolvons le système $(S)\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

Remarquons tout d'abord que $(S)\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$ peut aussi s'écrire $(S)\begin{cases} 2x + 1y = 3 \\ 1x + (-1)y = 2 \end{cases}$.

(S) peut s'écrire sous la forme de l'égalité matricielle suivante : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

En posant $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 2 \times (-1) - 1 \times 1 = -2 - 1 = -3$. Donc la matrice A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{-3} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$.

Donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1/_3 \times 3 + {}^1/_3 \times 2 \\ {}^1/_3 \times 3 - {}^2/_3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

Le couple $\left\{\frac{5}{3}; \frac{-1}{3}\right\}$ est l'unique solution du système (S).