

# MATRICES

## EXERCICES CORRIGES

### Exercice n°1.

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 22 & 17 & 0,1 & 8 \end{pmatrix}$ .

- 1) Donner le format de  $A$
- 2) Donner la valeur de chacun des éléments  $a_{14}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{33}$  et  $a_{32}$
- 3) Ecrire la matrice transposée  $A^t$  de  $A$  et donner son format

### Exercice n°2.

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 5 & \dots & 7 \\ \dots & 9 & \dots \\ 8 & \dots & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

- 1) Compléter l'écriture de  $A$  de format  $4 \times 3$  avec :  $a_{32} = 5$ ,  $a_{23} = -4$ ,  $a_{21} = 8$  et  $a_{12} = 11$
- 2) Ecrire la matrice transposée  $A^t$  de  $A$  et donner son format

### Exercice n°3.

- 1) Donner une matrice dont la transposée est égale à son opposée.
- 2) Donnez la matrice  $A$  telle que pour tout indice  $i$  et  $j$  avec,  $1 \leq i \leq 3$  et  $1 \leq j \leq 3$ , le terme  $a_{ij}$  soit donné par la formule  $a_{ij} = 2i - j$

### Exercice n°4.

On donne  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ .

Calculez  $A+B$ ,  $A-B$ ,  $3A$ ,  $4B$ ,  $3A-4B$

### Exercice n°5.

On donne  $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$ .

- 1) Trouver  $x$  et  $y$  pour que  $A+B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$
- 2) Trouver  $x$  et  $y$  pour que  $2A-4B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$

### Exercice n°6.

On considère les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  définies par  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -14 & 7 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$

Trouver deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $xA + yB = C$ .

### Exercice n°7.

Effectuer les produits suivants lorsque c'est possible. Lorsque c'est impossible, dire pourquoi.

a)  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

c)  $(-1 \ 4 \ 5) \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

e)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

f)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

### Exercice n°8.

Calculer, puis comparer les produits  $A \times B$  et  $B \times A$

a)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

b)  $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

### Exercice n°9.

Dans chacun des cas, calculer les produits  $A \times B$  et  $B \times A$ . Quelle particularité présente-t-il ?

a)  $A = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

b)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

### Exercice n°10.

On considère la matrice  $A$  définie par  $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  où  $x$  est un réel.

Déterminer  $x$  pour que  $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

### Exercice n°11.

Calculez et comparez  $A^2 + 2AB + B^2$  et  $(A+B)^2$  avec :  $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

### Exercice n°12.

Soit les deux matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$  et  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

On se propose de rechercher s'il existe une matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  telle que  $A \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$ .

1) Traduire cette égalité par un système de quatre équations à quatre inconnues

2) Résoudre ce système

3) Pour les valeurs trouvées  $a, b, c$ , et  $d$ , on pose  $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Vérifier que  $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_2$

### Exercice n°13.

Définir pour chaque système la matrice  $A$  et le vecteur colonne  $C$  tels que le système donné soit équivalent à l'égalité matricielle  $A \times X = C$

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} -5x + 3y = 2 \\ -x + y = 5 \end{cases} & 2) \begin{cases} 2,23x - 5,5y = 12 \\ 0,2x + y = 7 \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + y - z = 8 \\ -x + 3y + 7z = -22 \end{cases} & 4) \begin{cases} 3x - y = 15 \\ y + 7z = 12 \\ x + y = 25 \end{cases} \\ 5) \begin{cases} x + y + z = -5 \\ -y + z = 2 \end{cases} & 6) \begin{cases} 3x + 6y = x + z + 31 \\ 7y + 2z = x - y + 27 \end{cases} \end{array}$$

### Exercice n°14.

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

1) A l'aide de la calculatrice, donner la matrice inverse  $A^{-1}$  (mettre les coefficients sous forme fractionnaire)

2) En déduire la résolution des systèmes suivants :

$$\begin{array}{llll} a) \begin{cases} 3x - 10y = 4 \\ -2x + 8y = 7 \end{cases} & b) \begin{cases} 3x - 10y = 1,5 \\ -2x + 8y = -0,4 \end{cases} & c) \begin{cases} 3x - 10y = 15 \\ -2x + 8y = -5 \end{cases} & d) \begin{cases} 3x - 10y = 1,25 \\ -2x + 8y = 0,5 \end{cases} \end{array}$$

### Exercice n°15.

1) On considère le système  $\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + y + 3z = b \\ x - y + 2z = c \end{cases}$  où  $x, y, z, a, b$  et  $c$  sont des nombres réels.

Exprimer les nombres réels  $x, y$  et  $z$  en fonction de  $a, b$  et  $c$

2) On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Montrer que la matrice  $A$  est inversible et donner l'expression de  $A^{-1}$

### Exercice n°16.

On suppose que  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  où  $a, b, c$  et  $d$  sont des réels tels que  $ad - bc \neq 0$

1) Trouver en fonction de  $a, b, c$  et  $d$  les réels  $x, y, t$  et  $t$  tels que :  $A \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Vérifier que  $A$  admet pour matrice inverse :  $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

# **MATRICES - EXERCICES CORRIGES**

## **CORRECTION**

### Exercice n°1

1) La matrice  $A$  est de format  $3 \times 4$  puisqu'elle contient 3 lignes et 4 colonnes

2)  $a_{14}$  est le nombre figurant à l'intersection de la 1<sup>ère</sup> ligne et de la 4<sup>ème</sup> colonne, donc  $a_{14} = 4$

$a_{23}$  est le nombre figurant à l'intersection de la 2<sup>ème</sup> ligne et de la 3<sup>ème</sup> colonne, donc  $a_{23} = 3$

$a_{33}$  est le nombre figurant à l'intersection de la 3<sup>ème</sup> ligne et de la 3<sup>ème</sup> colonne, donc  $a_{33} = 0,1$

$a_{32}$  est le nombre figurant à l'intersection de la 3<sup>ème</sup> ligne et de la 2<sup>ème</sup> colonne, donc  $a_{32} = 17$

3) La matrice transposée  $A'$  de  $A$  s'obtient en intervertissant lignes et colonnes de  $A$ .

On obtient donc  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 22 \\ -6 & 7 & 17 \\ 8 & 3 & 0,1 \\ 4 & 11 & 8 \end{pmatrix}$ . La matrice  $A'$  est donc de dimension  $4 \times 3$

### Exercice n°2

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 5 & \dots & 7 \\ \dots & 9 & \dots \\ 8 & \dots & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

1)  $a_{32}$  est le nombre figurant à l'intersection de la 3<sup>ème</sup> ligne et de la 2<sup>ème</sup> colonne

$a_{23}$  est le nombre figurant à l'intersection de la 2<sup>ème</sup> ligne et de la 3<sup>ème</sup> colonne

$a_{21}$  est le nombre figurant à l'intersection de la 2<sup>ème</sup> ligne et de la 1<sup>ère</sup> colonne

$a_{12}$  est le nombre figurant à l'intersection de la 1<sup>ère</sup> ligne et de la 2<sup>ème</sup> colonne

On complète ainsi la matrice  $A$  :  $A = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 7 \\ 8 & 9 & -4 \\ 8 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2) La matrice transposée  $A'$  de  $A$  s'obtient en intervertissant lignes et colonnes de  $A$ .

On obtient donc  $A' = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 & 7 \\ 11 & 9 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . La matrice  $A'$  est donc de dimension  $3 \times 4$

### Exercice n°3

1) Toute matrice antisymétrique possède une transposée égale à son opposé.

Par exemple, si on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , on aura  $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A$

2) L'indication  $1 \leq i \leq 3$  et  $1 \leq j \leq 3$  nous donne le format de la matrice  $A$  : il s'agit d'une matrice  $3 \times 3$ .

De plus on calcule successivement  $a_{11} = 2 - 1 = 1$ ,  $a_{12} = 2 - 2 = 0$ ,  $a_{13} = 2 - 3 = -1$ ,  $a_{21} = 4 - 1 = 3$ ,

$a_{22} = 4 - 2 = 2$ ,  $a_{23} = 4 - 3 = 1$ ,  $a_{31} = 6 - 1 = 5$ ,  $a_{32} = 6 - 2 = 4$  et  $a_{33} = 6 - 3 = 3$ .

La matrice  $A$  est donc :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

### Exercice n°4

On calcule successivement :

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+7 & 5+2 \\ 3+(-1) & -1+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-7 & 5-2 \\ 3-(-1) & -1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3A = 3 \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 & 3 \times 5 \\ 3 \times 3 & 3 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} ; 4B = \begin{pmatrix} 4 \times 7 & 4 \times 2 \\ 4 \times (-1) & 4 \times (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 8 \\ -4 & -12 \end{pmatrix}$$

$$3A-4B = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 & 8 \\ -4 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-28 & 15-8 \\ 9-(-4) & -3-(-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$$

### Exercice n°5

1) On exprime d'une part  $A+B = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 5+7 \\ 0+(-1) & 2x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 12 \\ -1 & 2x+3y \end{pmatrix}$

On aura l'égalité  $A+B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$  si et seulement si  $\begin{pmatrix} x+y & 12 \\ -1 & 2x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$  donc par identification des

différents termes si et seulement si  $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=17 \end{cases}$ . On résout ce système par substitution :

$$\begin{cases} x+y=4 & L_1 \\ 2x+3y=17 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x & L_1 \\ 2x+3(4-x)=17 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x & L_1 \\ 2x+12-3x=17 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x & L_1 \\ -x=5 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-(-5) & L_1 \\ x=-5 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y=9 & L_1 \\ x=-5 & L_2 \end{cases}}$$

L'égalité  $A+B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$  aura donc lieu pour  $x=-5$  et  $y=9$

2) On exprime d'une part  $2A-4B = \begin{pmatrix} 2x & 10 \\ 0 & 4x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4y & 28 \\ -4 & 12y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-4y & -18 \\ 4 & 4x-12y \end{pmatrix}$

On aura l'égalité  $2A-4B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$  si et seulement si  $\begin{pmatrix} 2x-4y & -18 \\ 4 & 4x-12y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$  donc par

identification des différents termes si et seulement si  $\begin{cases} 2x-4y=-5 \\ 4x-12y=-16 \end{cases}$ . On résout ce système par substitution :

$$\begin{cases} 2x-4y=-5 & L_1 \\ 4x-12y=-16 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=-5 & L_1 \\ 2x-6y=-8 & \frac{1}{2}L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=4y-5 & L_1 \\ -2y=-3 & \frac{1}{2}L_2-L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=4 \times \frac{3}{2} - 5 & L_1 \\ y=\frac{3}{2} & \frac{1}{2}L_2-L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=1 & L_1 \\ y=\frac{3}{2} & \frac{1}{2}L_2-L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=\frac{1}{2} & L_1 \\ y=\frac{3}{2} & \frac{1}{2}L_2-L_1 \end{cases}}$$

L'égalité  $2A-4B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$  aura donc lieu pour  $x=\frac{1}{2}$  et  $y=\frac{3}{2}$

### Exercice n°6

$$\text{On calcule : } xA + yB = x \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y & 3x \\ -4x-2y & 2x+y \\ 8y & 7x+y \end{pmatrix}.$$

On aura l'égalité  $xA + yB = C$  si et seulement si  $\begin{pmatrix} x-2y & 3x \\ -4x-2y & 2x+y \\ 8y & 7x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -14 & 7 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$ , donc par identification des

termes, si et seulement si  $\begin{cases} x-2y = -4 \\ 3x = 6 \\ -4x-2y = -14 \\ 2x+y = 7 \\ 8y = 24 \\ 7x+y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

### Exercice n°7

a) Les matrices étant respectivement de format  $3 \times 2$  et  $2 \times 2$ , leur produit est bien défini et est une matrice  $3 \times 2$ . On a alors :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 5 \times 4 & 2 \times 5 + 5 \times 6 \\ 3 \times 2 + 6 \times 4 & 3 \times 5 + 6 \times 6 \\ 4 \times 2 + 7 \times 4 & 4 \times 5 + 7 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 30 & 51 \\ 36 & 62 \end{pmatrix}$$

b) Les matrices étant respectivement de format  $2 \times 2$  et  $3 \times 2$ , leur produit est impossible à définir.

c) Les matrices étant respectivement de format  $1 \times 3$  et  $3 \times 3$ , leur produit est bien défini et est une matrice  $1 \times 3$ .

On a alors :

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times 0 + 4 \times 2 + 5 \times 3 & -1 \times (-1) + 4 \times 4 + 5 \times 5 & -1 \times 6 + 4 \times (-2) + 5 \times 3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 23 & 42 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Les matrices étant respectivement de format  $3 \times 3$  et  $3 \times 2$ , leur produit est bien défini et est une matrice  $3 \times 2$ . On a alors :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 5 \times 2 + 0 \times 3 & 2 \times (-1) + 5 \times 0 + 0 \times 5 \\ 3 \times 1 + 6 \times 2 + 3 \times 3 & 3 \times (-1) + 6 \times 0 + 3 \times 5 \\ 4 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 & 4 \times (-1) + 1 \times 0 + 2 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 24 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

e) Les matrices étant respectivement de format  $3 \times 2$  et  $3 \times 2$ , leur produit est impossible à définir.

f) Les matrices étant respectivement de format  $3 \times 3$  et  $3 \times 3$ , leur produit est bien défini et est une matrice  $3 \times 3$ . On a alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 0 \times 0 + 5 \times 4 & 1 \times 7 + 0 \times 2 + 5 \times 5 & 1 \times 8 + 0 \times 3 + 5 \times 6 \\ 2 \times 2 + (-1) \times 0 + 6 \times 4 & 2 \times 7 + (-1) \times 2 + 6 \times 5 & 2 \times 8 + (-1) \times 3 + 6 \times 6 \\ 3 \times 2 + 4 \times 0 + 4 \times 7 & 3 \times 7 + 4 \times 2 + 7 \times 5 & 3 \times 8 + 4 \times 3 + 7 \times 6 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 22 & 32 & 38 \\ 28 & 42 & 49 \\ 34 & 64 & 78 \end{pmatrix}$$

### Exercice n°8

Pour chaque exemple, les matrices étant carrées de même format, leur produit dans les deux sens est bien défini

a) Si  $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$ , alors :

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times 4 + 8 \times (-5) & -1 \times 2 + 8 \times 8 \\ 2 \times 4 + 11 \times (-5) & 2 \times 2 + 11 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 & 62 \\ -47 & 92 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B \times A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times (-1) + 2 \times 2 & 4 \times 8 + 2 \times 11 \\ (-5) \times (-1) + 8 \times 2 & (-5) \times 8 + 8 \times 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 54 \\ 21 & 48 \end{pmatrix}$$

On constate que  $A \times B \neq B \times A$

b) Si  $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , alors :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 3 + 8 \times 1 & 4 \times 9 + 8 \times 1 \\ 1 \times 3 + 2 \times 1 & 1 \times 9 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 44 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B \times A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 4 + 9 \times 1 & 3 \times 8 + 9 \times 2 \\ 1 \times 4 + 1 \times 1 & 1 \times 8 + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 42 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

On constate que  $A \times B \neq B \times A$

c) Si  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , alors :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 5 + 1 \times 2 & 2 \times 2 + 1 \times 3 \\ 1 \times 5 + 1 \times 2 & 1 \times 2 + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B \times A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 2 + 2 \times 1 & 5 \times 1 + 2 \times 1 \\ 2 \times 2 + 3 \times 1 & 2 \times 1 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

On constate cette fois ci que  $A \times B = B \times A$ , **mais ce n'est surtout pas une règle générale !**

### Exercice n°9

Dans chaque cas, les matrices étant carrées de même format, leur produit est bien défini et est une matrice  $2 \times 2$

a) Si  $A = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ , alors :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 12 + (-12) \times 6 & 6 \times 6 + (-12) \times 3 \\ (-3) \times 12 + 6 \times 6 & (-3) \times 6 + 6 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que le produit  $A \times B$  est nul sans pour autant que  $A$  ou  $B$  soit la matrice nulle

b) Si  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , alors :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 0 + 4 \times 0 & 2 \times 2 + 4 \times (-1) \\ (-1) \times 0 + (-2) \times 0 & (-1) \times 2 + (-2) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que le produit  $A \times B$  est nul sans pour autant que  $A$  ou  $B$  soit la matrice nulle

### Exercice n°10

On calcule  $A^2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \times x + 1 \times 2 & x \times 1 + 1 \times 3 \\ 2 \times x + 3 \times 2 & 2 \times 1 + 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 2 & x + 3 \\ 2x + 6 & 11 \end{pmatrix}$ . Pour avoir  $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$ , il

suffit d'avoir  $\begin{pmatrix} x^2 + 2 & x + 3 \\ 2x + 6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = 6 \\ x + 3 = 1 \\ 2x + 6 = 2 \end{cases}$ , ce qui se produit si et seulement  $\boxed{x = -2}$

### Exercice n°11

On calcule :  $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 4 + 8 \times 1 & 4 \times 8 + 8 \times 2 \\ 1 \times 4 + 2 \times 1 & 1 \times 8 + 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ , puis

$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 3 + 9 \times 1 & 3 \times 9 + 9 \times 1 \\ 1 \times 3 + 1 \times 1 & 1 \times 9 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ ,

et enfin  $A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 3 + 8 \times 1 & 4 \times 9 + 8 \times 1 \\ 1 \times 3 + 2 \times 1 & 1 \times 9 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 44 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$ .

On peut ainsi calculer :

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 20 & 44 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 & 88 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 & 164 \\ 20 & 44 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'autre part, } A + B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{d'ou : } (A + B)^2 = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \times 7 + 17 \times 2 & 7 \times 17 + 17 \times 3 \\ 2 \times 7 + 3 \times 2 & 2 \times 17 + 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 & 170 \\ 20 & 42 \end{pmatrix}$$

On constate que  $\boxed{A^2 + 2AB + B^2 \neq (A + B)^2}$

### Exercice n°12

1) L'équation matricielle  $A \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$  se traduit par le système :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 0 \\ 5a + 6c = 0 \\ 5b + 6d = 1 \end{cases}$ .

2) On résout séparément deux systèmes :  $\begin{cases} a + c = 1 \\ 5a + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - c \\ 5(1 - c) + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - c \\ c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - (-5) = 6 \\ c = -5 \end{cases}$ ,

et  $\begin{cases} b + d = 0 \\ 5b + 6d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -d \\ 5(-d) + 6d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -d = -1 \\ d = 1 \end{cases}$

3) On pose :  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ .

On calcule, d'une part  $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 1 + (-1) \times 5 & 6 \times 1 + (-1) \times 6 \\ (-5) \times 1 + 1 \times 5 & (-5) \times 1 + 1 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et d'autre part  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 6 + 1 \times (-5) & 1 \times (-1) + 1 \times 1 \\ 5 \times 6 + 6 \times (-5) & 5 \times (-1) + 6 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

On a bien vérifié bien que  $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_2$

### Exercice n°13

1) En posant  $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ , le système  $\begin{cases} -5x + 3y = 2 \\ -x + y = 5 \end{cases}$  est équivalent à

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ c'est-à-dire à } A \times X = C$$

2) En posant  $A = \begin{pmatrix} 2,23 & -5,5 \\ 0,2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$ , le système  $\begin{cases} 2,23x - 5,5y = 12 \\ 0,2x + y = 7 \end{cases}$  est équivalent à

$$A \times X = C$$

3) En posant  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -22 \end{pmatrix}$ , le système  $\begin{cases} 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + y - z = 8 \\ -x + 3y + 7z = -22 \end{cases}$  est équivalent à

$$A \times X = C$$

4) Le système  $\begin{cases} 3x - y = 15 \\ y + 7z = 12 \\ x + y = 25 \end{cases}$  se réécrit  $\begin{cases} 3x - y + 0z = 15 \\ 0x + y + 7z = 12 \\ x + y + 0z = 25 \end{cases}$

En posant  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 25 \end{pmatrix}$ , le système  $\begin{cases} 3x - y = 15 \\ y + 7z = 12 \\ x + y = 25 \end{cases}$  est équivalent à  $A \times X = C$

5) Le système  $\begin{cases} x + y + z = -5 \\ -y + z = 2 \end{cases}$  se réécrit  $\begin{cases} x + y + z = -5 \\ 0x - y + z = 2 \end{cases}$

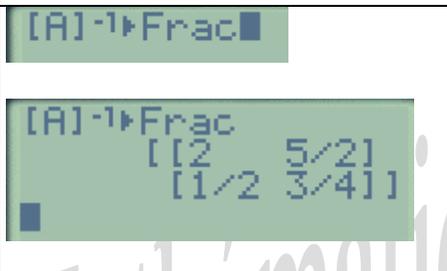
En posant  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ , le système  $\begin{cases} x + y + z = -5 \\ -y + z = 2 \end{cases}$  est équivalent à  $A \times X = C$

6) Le système  $\begin{cases} 3x + 6y = x + z + 31 \\ 7y + 2z = x - y + 27 \end{cases}$  se réécrit  $\begin{cases} 2x + 6y - z = 31 \\ -x + 8y + 2z = 27 \end{cases}$ . En posant  $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et

$C = \begin{pmatrix} 31 \\ 27 \end{pmatrix}$ , le système  $\begin{cases} 3x + 6y = x + z + 31 \\ 7y + 2z = x - y + 27 \end{cases}$  est équivalent à  $A \times X = C$

### Exercice n°14

1) Grâce à la calculatrice, on saisit la matrice A et on calcule son inverse

Saisie de la matrice A	Obtention de la matrice inverse :
	

2) a) Le système  $\begin{cases} 3x - 10y = 4 \\ -2x + 8y = 7 \end{cases}$  s'écrit  $A \times X = C$  avec  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ .

Puisque la matrice A est inversible, on aura  $X = A^{-1}C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \times 4 + \frac{5}{2} \times 7 = \frac{51}{2} \\ y = \frac{1}{2} \times 4 + \frac{3}{4} \times 7 = \frac{29}{4} \end{cases}$

Le système admet donc pour ensemble de solution :  $S = \left\{ \left( \frac{51}{2}; \frac{29}{4} \right) \right\}$

b) Le système  $\begin{cases} 3x-10y=1,5 \\ -2x+8y=-0,4 \end{cases}$  s'écrit  $A \times X = C$  avec  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,4 \end{pmatrix}$ . Puisque la matrice  $A$  est

inversible, on aura  $X = A^{-1}C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \times 1,5 + \frac{5}{2} \times (-0,4) = 2 \\ y = \frac{1}{2} \times 1,5 + \frac{3}{4} \times (-0,4) = 0,45 \end{cases}$

Le système admet donc pour ensemble de solution :  $S = \{(2; 0,45)\}$

c) Le système  $\begin{cases} 3x-10y=15 \\ -2x+8y=-5 \end{cases}$  s'écrit  $A \times X = C$  avec  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix}$ .

Puisque la matrice  $A$  est inversible, on aura  $X = A^{-1}C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \times 15 + \frac{5}{2} \times (-5) = 17,5 \\ y = \frac{1}{2} \times 15 + \frac{3}{4} \times (-5) = 3,75 \end{cases}$

Le système admet donc pour ensemble de solution :  $S = \{(17,5; 3,75)\}$

d) Le système  $\begin{cases} 3x-10y=1,25 \\ -2x+8y=0,5 \end{cases}$  s'écrit  $A \times X = C$  avec  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1,25 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ . Puisque la matrice  $A$  est

inversible, on aura  $X = A^{-1}C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,25 \\ 0,5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \times 1,25 + \frac{5}{2} \times 0,5 = 3,75 \\ y = \frac{1}{2} \times 1,25 + \frac{3}{4} \times 0,5 = 1 \end{cases}$

Le système admet donc pour ensemble de solution :  $S = \{(3,75; 1)\}$

### Exercice n°15

1) On a :

$$\begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ 2x+y+3z=b & L_2 \\ x-y+2z=c & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ x-y+2z=c & L_2 \text{ renumérotation des lignes} \\ 2x+y+3z=b & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ -2y+z=c-a & L_4 = L_2 - L_1 \\ -y+z=b-2a & L_5 = L_3 - 2L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a-y-z & L_1 \\ -y=c-b+a & L_4 - L_5 \\ z=b-2a+y & L_5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=a-(-a+b-c)-z & L_1 \\ y=-a+b-c & L_4 - L_5 \\ z=b-2a+(-a+b-c) & L_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a-(-a+b-c)-(-3a+2b-c) & L_1 \\ y=-a+b-c & L_4 - L_5 \\ z=-3a+2b-c & L_5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5a-3b+2c & L_1 \\ y=-a+b-c & L_4 - L_5 \\ z=-3a+2b-c & L_5 \end{cases}$$

2) Si on note  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ , alors le système  $\begin{cases} x+y+z=a \\ 2x+y+3z=b \\ x-y+2z=c \end{cases}$  se traduit

matriciellement par  $AX = B$

Puisque l'on a  $\begin{cases} x+y+z=a \\ 2x+y+3z=b \\ x-y+2z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5a-3b+2c \\ y=-a+b-c \\ z=-3a+2b-c \end{cases}$ , alors en notant  $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  on aura

$AX=B \Leftrightarrow X=CB$ . Or si  $A$  est inversible, on a l'équivalence  $AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B$ , ce qui nous permet

d'affirmer que la matrice  $A$  est inversible, et que  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

### Exercice n°16

1) On résout le système  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+bz=1 & L_1 \\ ay+bt=0 & L_2 \\ cx+dz=0 & L_3 \\ cy+dt=1 & L_4 \end{cases}$  en résolvant séparément les systèmes

$$\begin{cases} ax+bz=1 & L_1 \\ cx+dz=0 & L_2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} ay+bt=0 & L_1 \\ cy+dt=1 & L_2 \end{cases}$$

On résout le premier système :

$$\begin{cases} ax+bz=1 & L_1 \\ cx+dz=0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} acx+bcz=c & cL_1 \\ acx+adz=0 & aL_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} acx+bcz=c & cL_1 \\ (ad-bc)z=-c & aL_2 - cL_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} acx+bcz=c & cL_1 \\ z = -\frac{c}{ad-bc} & aL_2 - cL_1 \end{cases} \text{ (car}$$

$ad-bc \neq 0$ )

$$\text{et } \begin{cases} ax+bz=1 & L_1 \\ cx+dz=0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} adx+bdz=d & dL_1 \\ bcx+bdz=0 & bL_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (ad-bc)x=d & dL_1 - bL_2 \\ bcx+bdz=0 & bL_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{d}{ad-bc} & dL_1 - bL_2 \\ bcx+bdz=0 & bL_2 \end{cases} \text{ (car}$$

$ad-bc \neq 0$ )

On résout le deuxième système :

$$\begin{cases} ay+bt=0 & L_1 \\ cy+dt=1 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} acy+bct=0 & cL_1 \\ acy+adt=a & aL_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} acy+bct=0 & cL_1 \\ (ad-bc)t=a & aL_2 - cL_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} acy+bct=0 & cL_1 \\ t = \frac{a}{ad-bc} & aL_2 - cL_1 \end{cases} \text{ (car}$$

$ad-bc \neq 0$ )

$$\text{et } \begin{cases} ay+bt=0 & L_1 \\ cy+dt=1 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ady+bdt=0 & dL_1 \\ bcy+bdt=b & bL_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (ad-bc)y=-b & dL_1 - bL_2 \\ bcy+bdt=b & bL_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-b}{ad-bc} & dL_1 - bL_2 \\ bcy+bdt=b & bL_2 \end{cases} \text{ (car}$$

$ad-bc \neq 0$ )

2) On a ainsi  $\begin{cases} x = \frac{d}{ad-bc} \\ y = \frac{-b}{ad-bc} \\ z = -\frac{c}{ad-bc} \\ t = \frac{a}{ad-bc} \end{cases}$ . Si  $A$  est inversible, on a l'équivalence  $AX=I \Leftrightarrow X=A^{-1}I=A^{-1}$ , ce qui nous

permet d'affirmer que la matrice  $A$  est inversible, et que  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .